



**מבחן סיכום באלגוריתמים א' תשס"ה - 10.7.05**

- מספר המחברת שלך הוא \_\_\_\_\_
- במבחן 10 דפים כולל דף הפתיחה, יש לוודא **עכשיו** כי כל הדפים בידיך.
- במבחן 4 שאלות, יש לפתור את כל השאלות.
- יש לקרוא כל שאלה היטב, הבנת השאלות היא חלק מן המבחן.
- זהו מבחן בחומר סגור: מותר להכניס לחדר הבחינה 3 עמודים כתובים בגודל A4 בלבד.
- משך המבחן שלוש שעות.
- התשובות תכתבנה על גבי טופס המבחן, במקרה הצורך אפשר להשתמש גם במחברת.

	שאלה 1
	שאלה 2
	שאלה 3
	שאלה 4
	סך הכל

**בהצלחה!!**

### שאלה מספר 1 (25 נקודות)

בחברת ניידון יוזמים מערכת ממוחשבת אשר תסייע למנויים לבחור מסלול נסיעה מהיר ביותר. השירות בנוי כך: רשת הכבישים בישראל מתוארת על ידי רשימת צמתים, כאשר לכל צומת יש שם, ולרשימת כבישים, כאשר כל כביש מחבר שנים מן הצמתים ברשת הכבישים. בכל רגע, החברה משתמשת בתעבורת הניידונים (טלפונים ניידים) ברשת הכבישים, כדי לקבוע את המהירות הממוצעת בכל אחד מן הכבישים ברשת. כדי שמנוי יוכל להשתמש בשירות, על המנוי להודיע לחברה את שם הצומת בו הוא נמצא ברגע זה (להלן יקרא צומת המוצא) ואת שם הצומת אליו הוא רוצה להגיע (להלן צומת היעד).

עליכם להציע לחברת ניידון, את האלגוריתם בעזרתו יבחר המסלול המהיר ביותר.

#### הקלט העומד לרשותכם הוא:

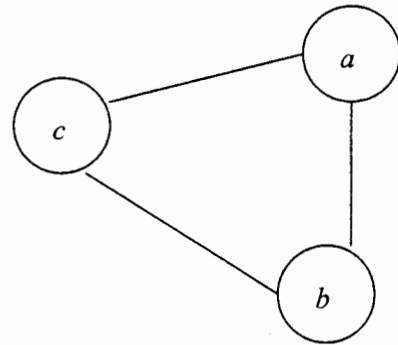
1. רשימת צמתים.
2. רשימת כבישים: לכל כביש, שמות הצמתים שהכביש מחבר ביניהם, אורך כל כביש והמהירות הממוצעת בכביש (לצורך פשטות נניח כי בכל כביש המהירות בשני הכיוונים שווה).
3. צומת מוצא וצומת יעד.

#### הפלט הנדרש:

רשימת כבישים בהם הנהג יעבור כדי להגיע מצומת המוצא אל צומת היעד בזמן הקצר ביותר.

#### דוגמא

נניח כי הרשת הנתונה היא:



נניח כי המרחק מ  $a$  ל  $b$  הוא 100 ק"מ והמהירות בכביש היא 100 ק"מ לשעה, המרחק מ  $b$  ל  $c$  הוא 80 ק"מ והמהירות בכביש היא 40 ק"מ לשעה והמרחק מ  $c$  ל  $a$  הוא 120 ק"מ והמהירות בכביש היא 240 ק"מ לשעה. אם צומת המוצא הוא  $b$  וצומת היעד הוא  $c$  אזי להגיע ישירות מ  $b$  ל  $c$  יקח שעתיים. לעומת זאת, להגיע מ  $b$  ל  $a$  יקח שעה ולהגיע מ  $a$  ל  $c$  יקח חצי שעה ולכן זהו המסלול המומלץ.

התשובה תפורט בהתאם לשאלות הבאות:

1.1 הציעו אלגוריתם לפתרון הבעיה בתשובתכם יש לפרט את מבני הנתונים בהם תשתמשו ולתאר באופן מילולי את האלגוריתם המוצע.

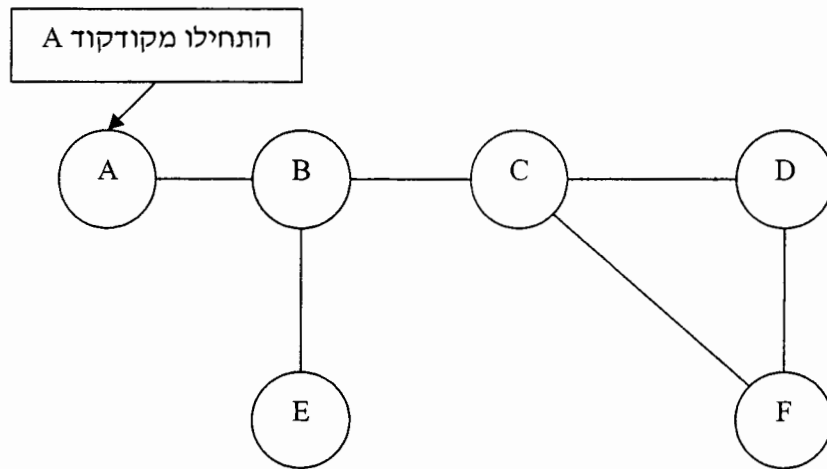
1.2 הציגו את האלגוריתם בעזרת קוד דמה (שימו לב: אין צורך להעתיק קוד של אלגוריתמים מוכרים).

1.3 נמקו את נכונות האלגוריתם המוצע (שימו לב: אין צורך להעתיק הוכחת נכונות של אלגוריתמים מוכרים).

1.4 מהי סיבוכיות האלגוריתם המוצע? נמקו תשובותיכם.

שאלה מספר 2 (25 נקודות)

נתון גרף לא מכוון  $G = (V, E)$ . עליכם לבצע חיפוש לעומק DFS בגרף הנתון, החל בצומת A.



לאחר ביצוע החיפוש יש לענות על השאלות הבאות:

2.1 עבור כל צומת  $v \in V$ , יש לחשב את זמן גילוי  $d[v]$ , זמן העזיבה  $f[v]$  וערך נמוך  $l[v]$ .

במידת הצורך השתמשו בטבלה הבאה:

$l[v]$	$f[v]$	$d[v]$	הצומת
			A
			B
			C
			D
			E
			F

2.2 לאחר סיום ביצוע האלגוריתם עליכם לשרטט כל אחד מן הרכיבים האי-פריקים של  $G$ , כל רכיב לחוד.

בכל רכיב יש לכלול את כל הצמתים וכל הקשתות של כל רכיב.

שאלה מס' 3 (25 נקודות)

עליכם להציע אלגוריתם  $MST\_Include$ , יעיל ככל האפשר לפתרון הבעיה הבאה:

קלט

1. גרף לא מכוון וממושקל  $G = (V, E, w)$ .

2. קשת  $(u, v) \in E$ .

פלט

1. משתנה בוליאני ששמו  $included$  המקיים:

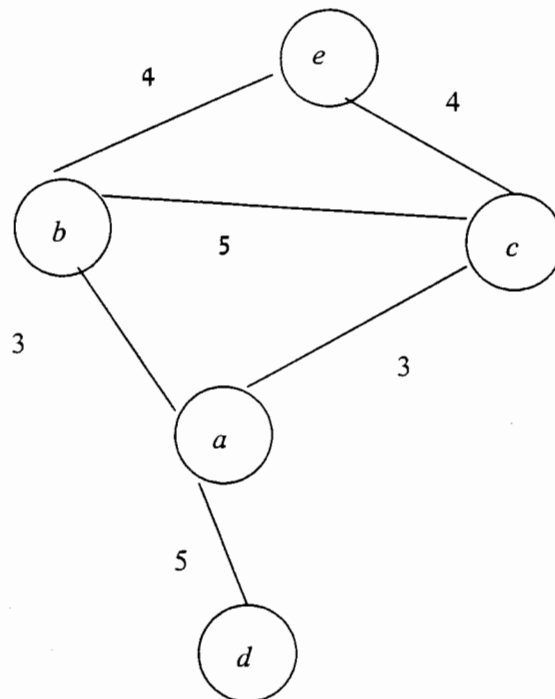
אם קיים עץ פורש מינימום של גרף הקלט  $G$ , והעץ  $T$  מכיל את  $(u, v)$ , אזי  $included = true$ .

אם לא קיים עץ פורש מינימום של  $G$  אשר מכיל את  $(u, v)$ , אזי  $included = false$ .

2. אם  $included = true$  יש לחשב את העץ הפורש מינימום של  $G$ ,  $T$ , אשר מכיל את הקשת  $(u, v)$ .

דוגמא

בהינתן הגרף הבא



מתקיים:

$$MST\_include(G, (d, a)) = true$$

$$MST\_include(G, (b, c)) = false$$

$$MST\_include(G, (b, e)) = true$$

התשובה תינתן בהתאם לסעיפים הבאים :  
3.1 תארו את האלגוריתם המוצע באופן מילולי.

3.2 תארו את האלגוריתם המוצע באמצעות קוד דמה . (שימו לב: אין צורך להעתיק קוד של אלגוריתמים מוכרים).

3.3 נמקו את נכונות האלגוריתם המוצע (שימו לב: אין צורך להעתיק הוכחת נכונות של אלגוריתמים מוכרים).

3.4 מהי סיבוכיות האלגוריתם המוצע? נמקו תשובתכם.



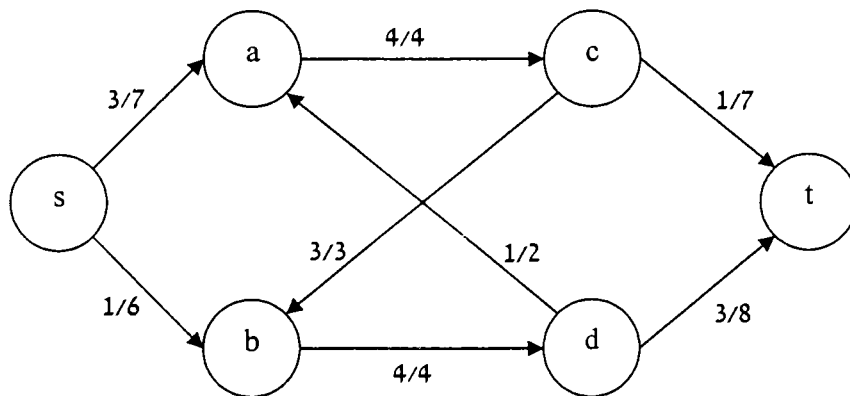
שאלה מס' 4 (25 נקודות)

4.1 עליכם להוכיח או להפריך את הטענה הבאה:

תהי  $G = (V, E, c, s, t)$  רשת זרימה עם קיבולים שלמים ויהי  $mc = (S, \bar{S})$  חתך מינימלי ב  $G$ .  
 נניח כי  $e_1$  ו  $e_2$  הן שתי קשתות ב  $mc$  המכוונות מ  $S$  אל  $\bar{S}$ . אם נגדיל את קיבול  $e_1$  ביחידה אחת  
 ונקטינן את קיבול  $e_2$  ביחידה אחת, אזי הזרימה המקסימלית ב  $G$  לא תשתנה.

הוכחה או הפרכה

4.2 נתונה רשת זרימה ובה מוגדרת גם פונקציית זרימה:



עליכם לענות על השאלות הבאות:

4.2.1 האם הזרימה ברשת הזרימה הנתונה היא זרימה חוקית? נמקו תשובתכם.

4.2.2 האם הזרימה ברשת הזרימה הנתונה היא זרימה מקסימלית? אם הזרימה הנתונה היא מקסימלית, ציינו מהי. אם הזרימה אינה מקסימלית אז שפרו את הזרימה בגרף וציינו מהי הזרימה המקסימלית בגרף.

4.2.3 ציינו על גבי הגרף חתך בעל קיבול מינימלי. מהו קיבול החתך הזה? נמקו תשובתכם.